WSTĘP TEORETYCZNY *Więcej na: www.tremolo.prv.pl , www.tremolo.elektroda.net dział laboratoria*

Wahadło – jest to ciało stałe wykonujace wahania wokuł nieruchomego punktu lub osi pod działaniem przyłozonych sił. W fizyce najogólniejszym wahadłem jest ciało wykonujące drgania pod wpływem siły ciężkości. Najprostsze wahadło składa się z masy m zawieszonej (ciężarka) zawieszonego na nici (albo lekkim pręcie) o długosci l. Gdy ciało jest wystarczająco małe, by mówić o nim że jest nieskończenie małe , nić jest bardzo sztywna i nierozciągliwa i lekka i długa w stosunku do rozmiarów geometrycznych ciała to o takim wahadle możemy mówić że jest to wahadło matematyczne.

Wahadło matematyczne:

Jeżeli wahadło wychylone z położenia równowagi zostanie ruszone ciało otrzyma prędkość prostopadlą do prostej l stanowiącej długość. Jezeli pominie sie opór powietrza i tarcie w punkcie zawieszenia to podczas ruchu spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej z której możemy otrzymac wzór:

$$\frac{v^2}{2g} + z = h$$

$$v = l\omega = l\frac{d\varphi}{dt}$$

Jezeli ciało wykonuje wahania o kąt mniejszy niż ~1/11 rad to o takim ruchu możemy mówić harmoniczny. Gdzie działa siła zwana siła quasisprężystą.

$$\mathrm{F} = -k\mathrm{X} = m\mathrm{A}$$

$$-kx = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

[1]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

[2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = A\,\mathrm{SIN}(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\omega\,\mathrm{COS}(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\,\mathrm{SIN}(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

Podstawiając przyspieszenie a do wzoru [2] otrzymujemy:

$$\frac{k}{m}x - \omega^2 x = 0$$
$$\frac{k}{m} = \omega^2 \vee x = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Kąt między siłą styczną do toru a silą ciezkości wynosi π/2 - φ. Zatem :

$$\frac{F}{-mg} = \mathrm{SIN}\varphi$$
$$\frac{-kx}{-mg} \; ; \; \varphi$$
$$\frac{kx}{mg} \; ; \; \varphi = \frac{x}{l} \to \frac{k}{m} = \frac{g}{l} = \omega^2$$

Podstawiając do wzoru na czestość kołową otrzymujemy:

[3]

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$
$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}$$
$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

W przypadku kątów wiekszych od 1/11 rad=~5*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{SIN}^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^4 \mathrm{SIN}^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right]$$

[4]

Wahadłem fizycznym nazywamy ciało sztywne wykonujace wahania wokół poziomej osi pod działaniem siły ciężkości – nie musza byc spełnione założenia dotyczące punktowości masy i pręta.

Takie wahadło wykonuje wahania z okresami obliczonymi ze wzorów takich samych jak dla wahadła matematycznego [3], [4], z tą rożnicą, że wystepuje tutaj tak zwane skrócenie długości

$$l_0 = \frac{I}{mD}$$

wahadła. L – za wzoru [3] nalezy zastąpić:

gdzie I – moment bezwładności względem osi zawieszenia D – odległość środka ciężkości od osi zawieszenia. L0 nazywa się długością zredukowaną.

Wahadła sprzężone są to dwa wahadła lub więcej, które moga na siebie oddziaływać za pomocą elementu sprzęgającego. Elementem sprzegającym może byc masa położona na nici rozłożonej pomiędzy dwoma wahadłami na prętach wahadeł w jakiejś odległosci od osi tych wahadeł, innym elementem sprzęgającym moze być sprężyna łącząca środki ciężkości wahadeł.

Wahadła sprzężone są dwoma ciałami wykonującymi ruch harmoniczny oddziaływującymi na siebie.

Moment kierujący każdego wahadła wynosi:

D=mgl – gdzie m – masa wahadła , g – przyspieszenie ziemskie, l – odległość osi wahadła od srodka ciężkości

Dodatkowo prócz tego momentu pojawia się Ds – moment sprzęgający zalezy od odległości s punktu zaczepienia siły sprzęgającej oraz rożnicy faz

$$D_S = D_S(s, \varphi_1 - \varphi_2)$$

Równanie ruchu każdego z tych wahadeł przyjmuje postać:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \omega^2\varphi_1 + k(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$
$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \omega^2\varphi_2 + k(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

gdzie:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{I} = \frac{mgl}{I}$$
$$k = \frac{D_S}{I}$$

Drganiami normalnymi nazywamy taki przypadek, ze oba wahadła wykonują wychylenie o ke same kąty, w przypadku drgań w fazie mówi się o drganiach normalnych I a w przypadku przeciwfazy drganiach normalnych II.

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$$
$$\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Oznaczmy:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \omega_0^2\psi_1 = 0$$
$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + (\omega^2 + 2k)\psi_2 = 0$$

Dodając lub odejmując stronami równaniue ruchu otrzymamy:

W pierwszym przypadku sa uwzględnione drgania normalne pierwsze, a w drugim drugie. Jak widac w pierwszym przypadku drgania normalne mają ta samą częstość co drgania pojedyńczych wahadeł – co zostało potwierdzone doświadczalnie.

Poniżej wzory dotyczace II drgań normalnych

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2k} \approx \omega_0 + \frac{k}{\omega_0}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} + \frac{D_s}{\sqrt{ID}}$$

Uwzgledniając wczesniejsze załozenia:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} + \omega_1^2\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \omega_2^2\psi_2 = 0$$

Amplitudy wahadeł podczas zajścia dudnienia:

$$A_1 = C\ \mathrm{COS}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

$$A_2 = C\ \mathrm{SIN}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

OBLICZENIA BŁĘDÓW WARTOSCI PROSTYCH

I. Czasy 10 wahnięć:

1. Wahadło prawe

srednia arytmetyczna: 12.13s

x	ε	$ε^2$
12.22	0.093	0.008711
12.01	-0.116	0.013611
12.15	0.023	0.000544

σ=0.11

2. Wahadło lewe

srednia arytmetyczna: 12.24

x	ε	$ε^2$
12.22	-0.019	0.000399
12.25	0.009	9.9E-05
12.25	0.009	9.9E-05

σ=0.017

II. Promień wahadeł. Za promień wahadeł przyjmuje połowe średnicy, za błąd w liczeniu promienia uznaje połowe odchylenia standardowego 3 pomiarów średnicy jednego z wahadeł 0,005cm. R=2,99cm

III. Drgania w fazie (pierwsze drgania normalne wahadeł)

srednia arytmetyczna: 12.053s

x	ε	$ε^2$

12.16	0.106	0.011377
12.00	-0.053	0.002844
12.00	-0.053	0.002844

σ=0.092

Drgania w przeciwfazie (drgania drugie)

srednia arytmetyczna: 11.58s

x	ε	$ε^2$
11.35	-0.233	0.054444
11.68	0.096	0.009344
11.72	0.136	0.018677

σ=0.2s

IV. Za mase wahadeł przyjąłem średnią arytmetyczną masy obu wahadeł 535g=0,535kg z błędem 1g (najmniejsza szalka wagi użyta do ważenia)

V. Błędy połów okresów dudnień:

1) s=10cm

srednia arytmetyczna: 21.96

x	ε	$ε^2$
16.03	-5.926	35.125377
19.34	-2.616	6.846944
30.5	8.543	72.988544

σ=7.5815851464805

Okres: 44s z błedem 15,2 s

2) s=11 cm

srednia arytmetyczna: 21.23

x	ε	ε^2
21.3	0.073	0.005377
21.2	-0.026	0.000711
21.18	-0.046	0.002177

σ=0.064291005073287
okres: 42.46s z błędem 0,13s

3) s=12 cm
srednia arytmetyczna: 17.03

x	ε	ε^2
15.13	-1.9	3.61
17.4	0.369	0.136899
18.56	1.529	2.340899

σ=1.7446776206509
okres: 34,06s z bledem 3,48s

4) s=13cm
srednia arytmetyczna: 15.27

x	ε	ε^2
16.18	0.916	0.840277
14.41	-0.853	0.728177
15.20	-0.063	0.004011

σ=0.88669799443403
Okres: 30,54 z błedem 1,78s

5) s=14 cm
srednia arytmetyczna: 15.63

x	ε	ε^2
16.22	0.593	0.352044
15.81	0.183	0.033611

14.85	-0.776	0.603211

σ=0.70315953618886
Okres: 31.26 z bledem 1,41s

6) s=15 cm
srednia arytmetyczna: 13.2

x	ε	$ε^2$
13	-0.2	0.04
13.97	0.769	0.592899
12.63	-0.57	0.3249

σ=0.69202601107184
Okres: 26,4s z błedem 1,4s

7) s=16 cm
srednia arytmetyczna: 12.43

x	ε	$ε^2$
12.37	-0.063	0.004011
12.30	-0.133	0.017777
12.63	0.196	0.038677

σ =0.17387735140993
okres: 24,86s z błędem 0,35s

8) s=17 cm
srednia arytmetyczna: 10.71

x	ε	$ε^2$
10.03	-0.683	0.466944
10.68	-0.033	0.001111
11.43	0.716	0.513611

σ =0.70059498523279
Okres: 21,42s z bledem 1,4 s

9) s=18 cm
srednia arytmetyczna: 10.30

x	ε	$ε^2$
11.03	0.726	0.528044
9.41	-0.893	0.798044
10.47	0.166	0.027777

σ=0.82275958416377
Okres: 20,6s z błędem 1,6 s

10) s=19 cm
srednia arytmetyczna: 9.00

x	ε	$ε^2$
9.09	0.093	0.008711
9.22	0.223	0.049877
8.68	-0.316	0.100277

σ=0.28183919765237
Okres: 18s z bledem 0,56s

11) s=25cm
srednia arytmetyczna: 6.2433333333333

x	ε	$ε^2$
6.28	0.036	0.001344
6.41	0.166	0.027777
6.04	-0.203	0.041344

σ=0.18770544300401
Okres: 12,49s z błędem 0,37s

VI. Za bląd długosci preta przyjmuje wartość odchylenia standardowego trzech pomiarów – 0,05cm

VII. Obliczam błąd masy preta obliczonej z gęstości stali o objetości pręta:

$$m_p = \rho V = \rho\pi r^2 h = 9,75cm^3 \cdot 7,9\frac{g}{cm^3} = 77g$$

$$\Delta m_p = m_p\left(\frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l}\right) = 77g \cdot 0,032 = 2,5g$$

VIII. Obliczam moment kierujący D dla kazdego z wahadeł oraz błąd tego momentu

$$D = mg(d+r) = 0,535kg \cdot 9,81\frac{N}{kg} \cdot (34,5 + 2,99) = 196,7Ncm = 1,97Nm$$

$$\Delta D = \left|\frac{\partial g}{\partial m}\Delta m\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial d}\Delta d\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial r}\Delta r\right| = D\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta r}{r}\right) = 0,005D = 0,981Ncm$$

IX. Obliczam moment bezwładności wahadła wraz z prętem:

$$I = I_O + I_S + I_P = \frac{1}{2}mr^2 + m(l+r)^2 + \frac{1}{3}m_p l^2 = 0,5 \cdot 535 \cdot 2,99^2 + 535(2,99 + 34,5)^2$$

$$I \approx 2390gcm^2 + 752000gcm^2 + 30600gcm^2 = 785000gcm^2$$

$$\Delta I = I_O\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r}\right) + I_S\left(\frac{2\Delta(l+r)}{l+r} + \frac{\Delta m}{m}\right) + I_P\left(\frac{\Delta m_p}{m_p} + \frac{2\Delta l}{l}\right) = I_O \cdot 0,005 + I_S \cdot 0,003 + I_P \cdot 0,002$$

$$\Delta I = 2340gcm^2$$

$$\frac{\Delta I}{I} = 0,003$$

X. Obliczam częstość (częstotliwość kołową drgań każdego wahadła)

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi\frac{1}{1,21s} = 5,19\frac{1}{s}$$

$$\Delta\omega = \left|\frac{\partial\omega}{\partial T}\Delta T\right| = \omega\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = 5,19 * 0,011\frac{1}{s} = 0,057\frac{1}{s}$$

Prawe:

Lewe:

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi\frac{1}{1,22s} = 5,15\frac{1}{s}$$

$$\Delta\omega = \left|\frac{\partial\omega}{\partial T}\Delta T\right| = \omega\left(\frac{\Delta T}{T}\right) = 5,15 * 0,002\frac{1}{s} = 0,01\frac{1}{s}$$

XI. Częstość drgań normalnych pierwszych wyniosła 5,21 rad/s częstotliwość 0,83Hz , częstość drgań normalnych drugich wyniosła 5,43 rad/s częstotliwość 0,86Hz

$$\omega_d = \frac{D_S}{\sqrt{ID}} \rightarrow D_S = \omega_d \sqrt{ID}$$

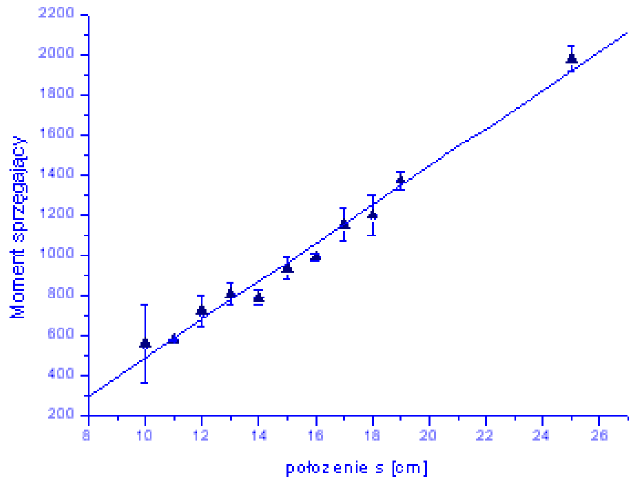
$$D_S(s=10) = \frac{2\pi}{T}\sqrt{ID} = \frac{6,2832}{2,2s}\sqrt{785000gcm^2 * 196,7Ncm} = \frac{6,2832}{2,2s}\sqrt{785kgcm^2 * 19670kg\frac{cm^2}{s^2}} = 11223kg\frac{cm^2}{s^2} = 1,1223Nm$$

XII. Obliczam momenty sprzęgające wahadeł: (przykład dla 1-ego pomiaru)

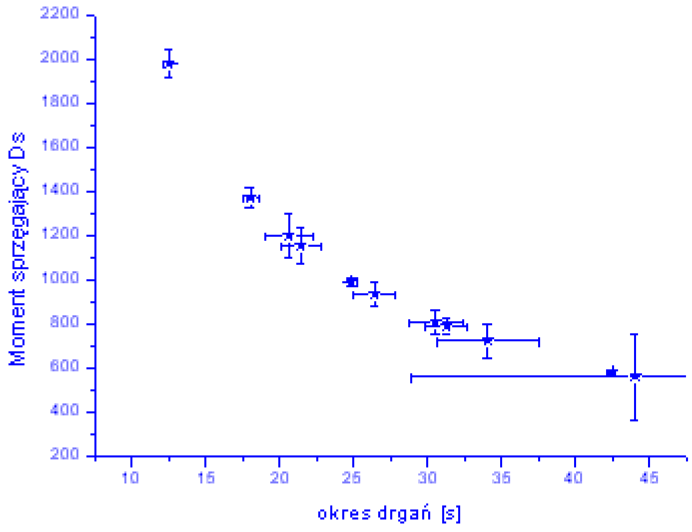
$$\Delta D_S = D_S\left(\frac{\Delta\omega_d}{\omega_d} + \frac{1}{2}\frac{\Delta I}{I} + \frac{1}{2}\frac{\Delta D}{D}\right) = 1,1223Nm\,(0,34 + 0,0015 + 0,0025) = 0,39Nm$$

Wysokość	Błąd	Okres T	Błąd T	Częstość	Błąd	Moment sprzegający	Błąd momentu sp.
10	0,05	44	15,2	0,14	0,05	561,13	196,09
11	0,05	42,46	0,13	0,15	4,50E-004	581,48	4,11
12	0,05	34,06	3,48	0,18	0,02	724,89	76,96
13	0,05	30,54	1,78	0,21	0,01	808,44	50,35
14	0,05	31,26	1,41	0,2	0,01	789,82	38,78
15	0,05	26,4	1,4	0,24	0,01	935,22	53,34
16	0,05	24,86	0,35	0,25	0	993,15	17,96
17	0,05	21,42	1,4	0,29	0,02	1152,65	79,95
18	0,05	20,6	1,6	0,31	0,02	1198,53	97,88
19	0,05	18	0,56	0,35	0,01	1371,65	48,16
25	0,05	12,49	0,37	0,5	0,01	1976,76	66,47

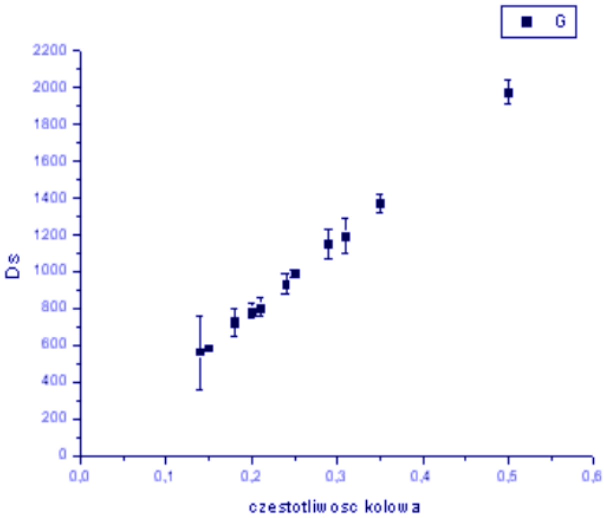
Wykres zależności Ds(s): wykres zaleznosci w zależności od wysokości zawieszenia nici



Wykres zależności Ds(T) w funkcji okresu



Wykres zalezności Ds(ω)



Wnioski:

Jak widac na załączonych wykresach zależność momentu sprzęgającego od odległosci s jest liniowa, liniową zaleznością jest też zaleznośc tego momenu w funkcji częstości, częstotliwości, zależność momentu Ds od okresu natomiast jest zależnością odwrotnie proporcjonalną – wykres po aproksymacji byłby hiperbolą. Im linka sprzęgająca niżej tym czas "przejścia" drgania jest mniejszy. Okresy dudnień maleją hiperbolicznie.

Pierwszy wynik obliczania okresu obarczone były bardzo dużym blędem sięgajacym 33% - mógł on być spowodowany niedokładnością związaną z tarciem między statywem a osią jednego z wahadeł, po za tym ustawienie wahadeł aby ich okresy były równe jest dosyc kłopotliwe , bowiem różnica ich mas wynosiła 2g, po za tym podczas pierwszych wahań jedno z wahadeł doznawało dodatkowych obciążeń , których skutkiem było wykręcanie się lewego wahadła.

Następne błedy są już mniejsze, wahadła dawały stabilniejsze wyniki.

Więcej na: www.tremolo.prv.pl , www.tremolo.elektroda.net dział laboratoria

Literatura:

Henryk Szydłowski – *Pracownia fizyczna* – PWN Warszawa 1979
B. Jaworski, A. Dietlaf, Miłkowska - *Kurs fizyki tom 1 i 3* – PWN Warszawa 1971
Robert Reshnick, David Halliday – *Fizyka 1* - wyd. 11 – PWN Warszawa 1999
Szczepan Szczeniowski - *Fizyka doświadczalna cz.1 – mechanika i akustyka* – PWN Warszawa 1980
Tadeusz Dryński – *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki* – PWN Warszawa
Encyklopedia Fizyki tom II i III – s. 645 PWN Warszawa 1974